III.TEORIA RELACJI – c.d.

4. DZIEDZINA, PRZECIWDZIEDZINA I POLE RELACJI

PRACA DOMOWA – ZAD. III.2 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 110)***
Niech A = {1, 2, 3, 4}. Które z poniższych wyrażeń odnoszą się do dwuczłonowych relacji w zbiorze A? Dla relacji proszę wskazać dziedzinę, przeciwdziedzinę, pole i konwers relacji.

1. <1, 2>
2. {<1, 2>}
3. {<1, 1>}
4. {{1}, {2}}
5. {{1, 2}}
6. {<1, 2>, <3, 4>}
7. <{1, 2}, {3, 4}>

5. KONWERS I ILOCZYN WZGLĘDNY RELACJI

PRACA DOMOWA – ZAD. III.3 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 130)***
Niech:
R={<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 4>}
S= {<2, 3>, <3, 3>, <4, 1>}.
Wyznacz iloczyny względne R;S oraz S;R.

PRACA DOMOWA – ZAD.III. 4
Proszę podać iloczyny względne następujących relacji:

1. bycia ojcem i bycia ojcem
2. bycia mężem i bycia córką
3. bycia przodkiem i bycia przodkiem
4. bycia synem i bycia siostrą

6. FUNKCJE

PRACA DOMOWA – ZAD. III.5 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 123)***
Która z poniższych relacji jest funkcją? Wśród funkcji wskaż funkcje jedno-jednoznaczne.

1. {<1, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <1, 3>}
2. {<1, 3>, <2, 1>, <3, 3>}
3. {<1, 2>, <2, 1>, <3, 3>}
4. {<1, 3>, <2, 2>, <1, 1>}

7. WŁASNOŚCI RELACJI

7.1 ZWROTNOŚĆ, SYMETRYCZNOŚĆ, PRZECHODNIOŚĆ I SPÓJNOŚĆ RELACJI

7.1.1 ZWROTNOŚĆ RELACJI

Pod względem zwrotności relacja może być:

1. zwrotna
2. azwrotna (inaczej: przeciwzwrotna)
3. ani zwrotna, ani azwrotna

DEF. R jest zwrotna w zbiorze A $\equiv \forall x \in A\ (xRx)$

DEF. R jest azwrotna w zbiorze A $\equiv \forall x \in A\ \neg(xRx)$

Relacja może nie być, ani zwrotna, ani azwrotna w zbiorze A wtedy, gdy istnieją takie elementy zbioru A, które są w relacji do samych siebie i jednocześnie istnieją takie elementy zbioru A, które nie są w relacji do samych siebie. Przykładem takiej relacji jest relacja *podobania się* w zbiorze ludzi.

7.1.2 SYMETRYCZNOŚĆ RELACJI

Pod względem symetryczności relacja może być:

1. symetryczna
2. asymetryczna (inaczej: przeciwsymetryczna)
3. antysymetryczna
4. ani symetryczna, ani asymetryczna

DEF. R jest symetryczna w zbiorze A $\equiv \forall x,y \in A\ (xRy \rightarrow yRx)$

DEF. R jest asymetryczna w zbiorze A $\equiv \forall x,y \in A\ [xRy \rightarrow \neg(yRx)]$

DEF. R jest antysymetryczna w zbiorze A $\equiv \forall x,y \in A\ (xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$

7.1.3 PRZECHODNIOŚĆ RELACJI

Pod względem przechodniości relacja może być:

1. przechodnia
2. nieprzechodnia

DEF. R jest przechodnia w zbiorze A $\equiv \forall x,y,z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

7.1.4 SPÓJNOŚĆ RELACJI

Pod względem spójności relacja może być:

1. spójna
2. niespójna

DEF. R jest spójna w zbiorze A $\equiv \forall x,y \in A\ (xRy \vee yRx \vee x=y)$

PRACA DOMOWA – ZAD. III.6 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 116-117)***

Niech A={1, 2, 3, 4}. Jakie własności formalne posiadają w zbiorze A relacje:

1. R = {<1, 2>, <3, 4>, <2, 1>, <4, 3>}
2. R = {<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <3, 4>, <4, 4>}
3. R = {<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 4>}

7.2 RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCIOWE I PORZĄDKUJĄCE

7.2.1 RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCIOWE

DEF. Relację $R \subset A \times A$ nazywamy ***relacją równoważnościową,*** gdy jest ona: (1) zwrotna w zbiorze A, (2) symetryczna w zbiorze A, (3) przechodnia w zbiorze A.

PRZYKŁADAMI takiej relacji są:
- identyczność (w dowolnym zbiorze)
- równoważność wyrażeń
- przystawanie odcinków
- przystawanie i podobieństwo trójkątów (ogólniej: wielokątów)
- równoległość prostych

PRACA DOMOWA – ZAD. III.7
Na zbiorze A={a, b, c, d} określona jest relacja R. Uzupełnij ją tak, aby otrzymać relację równoważnościową.
1. R={<a, b>, <b, b>, <b, c>, <c, c>}.
2. R={<a, a>, <a, b>, <b, c>, <d, c>}.

7.2.2 RELACJE PORZĄDKUJĄCE

DEF. Relację $R \subset A \times A$ nazywamy ***relacją mocnego (ostrego) porządku,*** gdy jest ona: (1) azwrotna w zbiorze A, (2) przechodnia w zbiorze A.
Mówimy wtedy, że relacja *R* mocno (ostro) porządkuje zbiór *A*.

DEF. Relację $R \subset A \times A$ nazywamy ***relacją słabego (nieostrego) porządku*** wtedy, gdy jest ona: (1) zwrotna w zbiorze A, (2) antysymetryczna w zbiorze A, (2) przechodnia w zbiorze A.
Mówimy wtedy, że relacja *R* słabo (nieostro) porządkuje zbiór *A*.

DEF. Relację $R \subset A \times A$ nazywamy ***relacją liniowego porządku*** wtedy, gdy jest ona relacją porządku i jednocześnie jest spójna w zbiorze A.
Mówimy wtedy, że relacja *R* porządkuje liniowo zbiór *A*.
Wśród relacja liniowych wyróżnia się:
1. *liniowe relacje mocnego porządku,*
2. *liniowe relacje słabego porządku.*

PRACA DOMOWA – ZAD. III.8 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 122)***
Wśród poniższych relacji wskaż te, które porządkują słabo i te które porządkują mocno zbiór A={1, 2, 3, 4}.
1. R={<1, 3>, <2, 3>, <4, 1>, <4, 3>}
2. R={<1, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <1, 4>}
3. R={<4, 2>, <3, 4>, <4, 1>, <3, 2>, <3, 1>, <1, 2>}
4. R={<2, 3>, <1, 3>, <4, 3>, <2, 1>, <2, 4>}
5. R={<1, 2>, <1, 3>, <4, 2>, <4, 3>}

PRACA DOMOWA – ZAD. III.9 ***(B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 117)***
Podaj przykład relacji, która w zbiorze A={1, 2, 3} jest:
1. Zwrotna, symetryczna lecz nieprzechodnia
2. Asymetryczna, przechodnia i spójna

3. Asymetryczna, przechodnia lecz niespójna
4. Symetryczna i zarazem antysymetryczna
5. Asymetryczna i zarazem antysymetryczna
6. Antysymetryczna lecz nie asymetryczna
7. Równoważnościowa
8. Liniowym słabym porządkiem
9. Nieliniowym słabym porządkiem
10. Mocnym porządkiem
11. Liniowym mocnym porządkiem