

## II. TEORIA ZBIORÓW

1. **PODZIAŁ ZBIORÓW**
  - 1.1 Podział ze względu na charakter zbioru
  - 1.2 Podział ze względu na ostrość warunku
  - 1.3. Podział ze względu na złożoność
2. **RELACJE MIĘDZY ZBIORAMI**
3. **RODZINY ZBIORÓW**
  - 3.1 Zbiór potęgowy
  - 3.2 Podział logiczny
  - 3.3 Analiza logiczna

### 2. RELACJE MIĘDZY ZBIORAMI (STOSUNKI MIĘDZY ZAKRESAMI POJĘĆ)

- **ZAWIERANIE SIĘ**
- **IDENTYCZNOŚĆ**
- **PODRZĘDNOŚĆ**
- **NADRZĘDNOŚĆ**
- **KRZYŻOWANIE SIĘ**
- **ROZŁĄCZNOŚĆ**

Zakresy pojęć to zbiory. Wyróżnia się między zbiorami relację zawierania się niewłaściwego (inaczej: inkluzji niewłaściwej), symbolicznie:  $\subset$ , oraz zawierania się właściwego (inaczej: inkluzji właściwej), symbolicznie:  $\subseteq$ .

**DEF.**  $X \subset Y \equiv \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)$

Każdy element zbioru  $X$  jest elementem zbioru  $Y$ . Mówimy, że  $X$  jest podzbiorem  $Y$ .

**DEF.**  $X \subseteq Y \equiv X \subset Y \wedge X \neq Y$

✓ **UWAGA:** Nie należy mylić relacji bycia podzbiorem (relacji zawierania:  $\subset$  lub  $\subseteq$ ) z relacją należenia do zbioru  $\in$ .

P- **ZAWIERANIE SIĘ (niewłaściwe)**

**DEF.**  $\downarrow S \subset \downarrow P \equiv SaP$

2. **IDENTYCZNOŚĆ**

**DEF.**  $\downarrow S = \downarrow P \equiv \downarrow S \subset \downarrow P \wedge \downarrow P \subset \downarrow S$

PRZYKŁ. 1

S – pojęcie człowieka

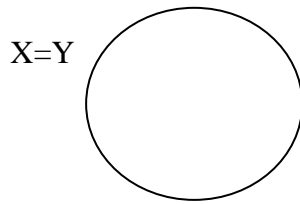
P – pojęcie zwierzęcia rozumnego

PRZYKŁ. 2

$X = \{x: x \text{ jest dębem}\}$

$Y = \{y: y \text{ jest drzewem, którego owocami są żołądźce}\}$

Zbiory  $X$  i  $Y$  są identyczne, gdyż każdy dąb jest drzewem, którego owocami są żołądźce (z definicji tego, że  $X \subset Y$ ) i każde drzewo, którego owocami są żołądźce jest dębem (z definicji tego, że  $Y \subset X$ ).



### P- PODRZĘDNOŚĆ

**DEF.**  $\downarrow S$  jest *podrzędny* względem  $\downarrow P \equiv$  spełnione są następujące warunki: (1)  $\downarrow S \subset \downarrow P$ , (2)  $\neg(\downarrow P \subset \downarrow S)$

#### PRZYKŁ.1

S – pojęcie zielonego przedmiotu

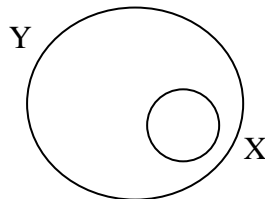
P – pojęcie kolorowego przedmiotu

#### PRZYKŁ.2

$X = \{x: x \text{ jest dębem}\}$

$Y = \{y: y \text{ jest drzewem}\}$

Zbiór dębów jest podrzędny w stosunku do zbioru drzew, ponieważ każdy dąb jest drzewem ( $X \subset Y$ ) i istnieją drzewa nie będące dębami, np. buki, kasztany, świerki (czyli nie każde drzewo jest dębem  $\neg(Y \subset X)$ ).



### P- NADRZĘDNOŚĆ

**DEF.**  $\downarrow S$  jest *nadrzędny* względem  $\downarrow P \equiv$  spełnione są następujące warunki: (1)  $\downarrow P \subset \downarrow S$ , (2)  $\neg(\downarrow S \subset \downarrow P)$

### P- KRZYŻOWANIE SIĘ

**DEF.**  $\downarrow S$  *krzyżuje się* z  $\downarrow P \equiv$  spełnione są następujące warunki: (1)  $\neg(\downarrow S \subset \downarrow P)$ , (2)  $\neg(\downarrow P \subset \downarrow S)$ , (3)  $S \cap P$

#### PRZYKŁ.1

S- przedmioty białe

P- ptaki

$S \cap P$  – niektóre ptaki są białe

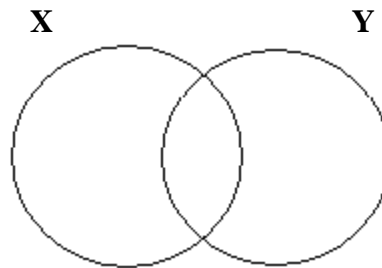
#### PRZYKŁ.2

$X = \{x: x \text{ jest dębem}\}$

$Y = \{y: y \text{ jest drzewem rosnącym w Warszawie}\}$

Zbiór dębów i zbiór drzew rosnących w Warszawie krzyżują się, ponieważ istnieją dęby rosnące w Warszawie (czyli spełniony jest warunek:  $X \cap Y \neq \emptyset$ ) i istnieją dęby rosnące poza Warszawą (czyli spełniony jest warunek:  $\neg(X \subset Y)$ ) i istnieją drzewa, które nie są dębami,

ale rosną w Warszawie, np. kasztany rosnące w Warszawie, topole rosnące w Warszawie (czyli spełniony jest warunek:  $\neg(Y \subset X)$ ).



## 6. ROZŁĄCZNOŚĆ

**DEF.**  $\downarrow S$  jest *rozłączny* względem  $\downarrow P \equiv SeP$

### PRZYKŁ.1

S – przedmioty trójkatne

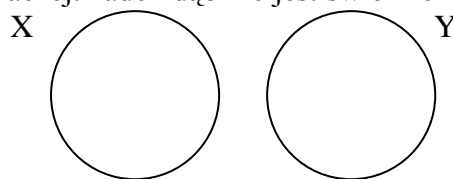
P- ptaki

### PRZYKŁ.2

X = {x: x jest dębem}

Y = {y: y jest świerkiem}

Zbiór dębów i zbiór świerków są rozłączne, ponieważ nie istnieją dęby będące świerkami, czy mówiąc jeszcze inaczej: żaden dąb nie jest świerkiem.



**DEF.** Rozłączne  $\downarrow S$  i  $\downarrow P$  są *przeciwne*  $\equiv \downarrow S \cup \downarrow P \neq 1$

**DEF.** Rozłączne  $\downarrow S$  i  $\downarrow P$  są *sprzeczne*  $\equiv \downarrow S \cup \downarrow P = 1$

### PRZYKŁ.3

Zakresy pojęć człowiek i nieczłowiek są sprzeczne. Natomiast zakresem przeciwnym do zakresu pojęcia człowiek będzie np. zakres pojęcia kot.

## **PRACA DOMOWA – ZAD.II.1**

Proszę określić, jakie relacje zachodzą między zakresami następujących pojęć:

1. student i analfabeta
2. student i osoba nieinteligentna
3. autobus i pojazd
4. nauczyciel języka polskiego i Anglik
5. człowiek i ptak
6. człowiek i ssak żyjący w Afryce
7. kobieta zamężna i mężczyzna żonaty
8. murzyn i osoba czarnoskóra
9. szkoła wyższa i absolwent szkoły wyższej
10. koń i kopyto

11. osoba posiadająca brata i kobieta posiadająca rodzeństwo
12. mężczyzna żonaty i osoba po ślubie
13. mężczyzna żonaty i osoba zakochana
14. mężczyzn posiadający dziecko i osoba posiadająca siostrę
15. osoba posiadająca dziecko i kobieta posiadająca żyjącego ojca

**PRACA DOMOWA – ZAD.II.2 (c.d. zadania z zajęć)**

Niech  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ ,  $C = \{1, 5\}$ . Wyznacz:

- g.  $-(A - B)$
- h.  $(A \cap B) - C$
- i.  $A \cap -(B - C)$
- j.  $[B - (A \cup C)] \cap -(A \cup C)$
- k.  $-(A - B) \cup -(B - C)$
- l.  $(A \cap B) - [-(B \cup C)]$

**PRACA DOMOWA – ZAD.II.3 (B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 86)**

Dla każdej pary podanych niżej zbiorów wskaż zbiór, który jest ich sumą:

- A – zbiór parzystych liczb naturalnych  
 B – zbiór nieparzystych liczb naturalnych  
 C – zbiór liczb naturalnych większych od 10  
 D =  $\{4, 6, \{8\}\}$   
 E =  $\{11, \{12, 13\}\}$

### 3. RODZINY ZBIORÓW

**PRACA DOMOWA – ZAD.II.4 (B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 83)**

Wśród podanych niżej zbiorów A, B, C, D, E wskaż

- (a) zbiór o najmniejszej liczbie elementów
- (b) zbiór o największej liczbie elementów
- (c) zbiory identyczne
- (d) zbiory mające dokładnie jeden element wspólny
- (e) zbiory nie mające żadnego elementu wspólnego

- A =  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 B =  $\{2, \{1, 4\}, \{3, 5, 6\}\}$   
 C =  $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$   
 D =  $\{3, \{2\}, \{\{5\}\}\}$   
 E =  $\{\{3-1\}, 3, \{\{3+2\}\}\}$

**PRACA DOMOWA – ZAD.II.5 (B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 105)**

Wskaż zbiór, który jest sumą i zbiór, który jest iloczynem rodziny zbiorów:

1.  $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 4, 3, 2\}\}$
2.  $\mathcal{A} = \{\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}\}$

**PRACA DOMOWA – ZAD.II.6 (B. Stanosz, Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 106)**

Wskaż zbiór potęgowy zbioru:

1.  $U_1 = \emptyset$
2.  $U_2 = \{\emptyset\}$
3.  $U_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

### **PRACA DOMOWA – ZAD.II.7** (B. Stanosz, *Ćwiczenia z logiki, 1980, s. 107*)

Niech  $K = \{1, 2, 3, 4\}$ . Która z podanych poniżej rodzin zbiorów jest podziałem zbioru  $K$ ?

1.  $U_1 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$
2.  $U_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$
3.  $U_3 = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$
4.  $U_4 = \{\{1\}, \{4\}, \{3\}, \{2\}\}$
5.  $U_5 = \{\{1\}, \{2, 4\}, \{2\}\}$

### **PRACA DOMOWA – ZAD.II.8**

Niech  $K = \{1, 2, 3, 4\}$ . Która z podanych poniżej rodzin zbiorów jest analizą zbioru  $K$ ?

1.  $U_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{4, 2, 1\}\}$
2.  $U_2 = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}\}$
3.  $U_3 = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 4, 3, 2, 1\}, \{5, 4, 3, 2, 1\}\}$
4.  $U_4 = \{\{\emptyset\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 4, 3, 2, 1\}, \{5, 4, 3, 2, 1\}\}$

## **III. TEORIA RELACJI**

1. **PARA UPORZĄDKOWANA**
2. **ILOCZYN KARTEZJAŃSKI**
3. **RELACJA**
4. **DZIEDZINA, PRZECIWDZIEDZINA I POLE RELACJI**
5. **KONWERS I ILOCZYN WZGLĘDNY RELACJI**
6. **WŁASNOŚCI RELACJI**

### **1. PARA UPORZĄDKOWANA**

**DEF.1**  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Pojęcie *pary uporządkowanej* wprowadzamy po to, aby wyrazić kolejność elementów zbioru. W zbiorze, który nie jest parą uporządkowaną, zachodzi zależność:

$$\{x, y\} = \{y, x\}.$$

Natomiast w parze uporządkowanej taka zależność nie zachodzi, tzn.:

$$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle.$$

Różnicę pod względem kolejności elementów między zbiorem i parą uporządkowaną (ogólniej  $n$ -ką uporządkowaną) można porównać ze znanymi z matematyki rozróżnieniami pod tym względem między zbiorem i ciągiem w analizie matematycznej czy kombinacją i wariacją w rachunku prawdopodobieństwa.

Wagę kolejności podkreśla twierdzenie o identyczności dwóch par uporządkowanych:

**TW.**  $\langle x, y \rangle = \langle z, u \rangle \equiv x=z \wedge y=u$

Twierdzenie to wskazuje, że dwie pary uporządkowane są tylko wtedy równe, gdy równe są ich odpowiadające sobie (pod względem kolejności) elementy, tzn.: gdy *pierwszy element* pierwszej pary ( $x$ ) jest identyczny z *pierwszym elementem* drugiej pary ( $z$ ) oraz gdy *drugi element* pierwszej pary ( $y$ ) jest identyczny z *drugim elementem* drugiej pary ( $u$ ).

## 2. ILOCZYN KARTEZJAŃSKI

Dwuczłonowy iloczyn kartezjański  $X \times Y$  (nie należy go mylić ze „zwykłym” iloczynem zbiorów, czyli częścią wspólną) jest to zbiór par uporządkowanych, takich że pierwsze elementy tych par uporządkowanych należą do zbioru  $X$  i drugie elementy par należą do zbioru  $Y$ :

**DEF.**  $\langle x, y \rangle \in X \times Y \equiv x \in X \wedge y \in Y$

Inaczej:  $X \times Y = \{\langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$

### PRACA DOMOWA - ZAD.III.1

Proszę wyznaczyć iloczyny kartezjańskie:  $X \times Y$  i  $Y \times X$ , dla następujących zbiorów:

1.  $X = \{5\}$ ,  $Y = \{19, 20, 25\}$

2.  $X = \{2, 3\}$ ,  $Y = \{a, b\}$

## 3. RELACJA

**DEF. Relacja dwuargumentowa**  $xRy$  jest to zbiór par uporządkowanych

Inaczej: Relacja dwuargumentowa jest to podzbiór dwuczłonowego iloczynu kartezjańskiego

Zachodzenie relacji dwuargumentowej zapisujemy następująco:  $xRy$  lub  $\langle x, y \rangle \in R$

### PRZYKŁ.

**a.**  $x$  jest matką  $y$ -ka w zbiorze ludzi  $L$

Relacja: *bycia matką*, jest relacją dwuargumentową:  $R(x, y)$ . Jest ona określona na dwuczłonowym iloczynie kartezjańskim:  $R \subset L \times L$ .

**b.**  $x$  porusza  $y$ -kiem w zbiorze przedmiotów  $P$

Relacja: *poruszania*, jest relacją dwuargumentową:  $R(x, y)$ . Jest ona określona na dwuczłonowym iloczynie kartezjańskim:  $R \subset P \times P$ .

✓ **UWAGA:** W każdym zdaniu, w którym mówimy coś, o co najmniej dwóch przedmiotach stwierdzamy zachodzenie pewnej relacji (stwierdzamy, że te przedmioty mają się do siebie w pewien określony sposób), np. w zdaniu „Ania kocha Janka” stwierdzamy, że dwa obiekty mają się do siebie w pewien sposób, mianowicie *Ania* i *Jan* pozostają do siebie w relacji *kochania*.

## 4. DZIEDZINA, PRZECIWDZIEDZINA I POLE RELACJI

**DEF.**  $D_L(R) = \{x : \exists y \ xRy\}$

W obrazowy, choć bardzo nieprecyzyjny sposób definicję tę można rozumieć następująco: dziedzina jest to zbiór  $x$ -ów, ale nie dowolnych, tylko takich, do których „coś” (czyli  $y$ ) jest w relacji, dla której wyznaczana jest dziedzina.

Dziedzinę inaczej określa się jako dziedzinę lewą – wtedy przeciwdziedzinę określa się jako dziedzinę prawą.

**DEF.**  $D_P(R) = \{y : \exists x \ xRy\}$

**DEF.**  $P(R) = D_L(R) \cup D_P(R)$

Obrazowo można powiedzieć, że pole relacji to zbiór, który „obejmuje” wszystkie przedmioty uczestniczące w relacji („po prawej i lewej stronie”).

## 5. KONWERS I ILOCZYN WZGLĘDNY RELACJI

Konwers relacji  $R$  oznacza się symbolem  $R'$ :

**DEF.**  $xR' y \equiv yRx$

**ZAD.**

Proszę wyznaczyć konwersy relacji określonych w zad. 4.1

Iloczyn względny relacji  $R$  i relacji  $S$  oznacza się symbolem  $R;S$ :

**DEF.**  $xR;Sz \equiv \exists y (xRy \text{ i } ySz)$