

Uwaga: Praca domowa obejmuje 3 zadania. Poniższy tekst dotyczy zarówno ostatnich ćwiczeń (dokończenie pierwszego, wprowadzającego rozdziału), jak i wybranych zagadnień poruszanych na wykładzie. Studentów z grupy 4, poniżej opisany pkt 5 z rozdziału I (dotyczący definicji) nie obowiązuje na 21 ale dopiero na 28 października.

## I. WPROWADZENIE DO LOGIKI – c.d.

1. POJĘCIE JĘZYKA
2. WYRAŻENIA JĘZYKOWE
3. SYNTAKTYCZNA ANALIZA WYPOWIEDZI
4. FORMALNA ANALIZA WYPOWIEDZI
5. BUDOWA DEFINICJI

### 2. WYRAŻENIA JĘZYKA – c.d.

#### FUNKTORY

Wśród funktorów wyróżnić można dwie ważne grupy:

1. predykaty
2. spójniki logiczne.

**DEF.** *Predykat* jest to funktor zdaniotwórczy od argumentów nazwowych

**DEF.** *Spójnik logiczny* jest to funktor zdaniotwórczy od argumentów zdaniowych

#### OPERATORY

*Operatory* to tak jak funktory wyrażenia niesamodzielne. Mówimy o nich, że *wiążą zmienne*.

Wśród operatorów wyróżniamy:

- Kwantyfikator ogólny (sybolicznie:  $\forall$ )
- Kwantyfikator szczegółowy (symbolicznie:  $\exists$ )
- Operator abstrakcji (symbolicznie:  $\{ : \}$ )

$\forall x$  (x jest człowiekiem) – w zdaniu tym opisuje się, że *wszystkie obiekty x są ludźmi*.

$\exists x$  (x jest człowiekiem) – w zdaniu tym opisuje się, że *istnieje przynajmniej jeden (albo więcej, może nawet wszystkie) obiekt x, który jest człowiekiem*.

$\{x: x \text{ jest człowiekiem}\}$  – wyrażenie oznacza *zbiór tych obiektów x, które spełniają warunek bycia człowiekiem, czyli po prostu – zbiór ludzi*.

**DEF.** *Wskaźnik operatora* - wyrażenie występujące bezpośrednio po operatorze.

**DEF.** *Zasięg operatora* - sensowne wyrażenie występujące bezpośrednio po danym operatorze oraz jego wskaźniku i ewentualnie ograniczone jednorodnymi nawiasami.

Wyrażenie sensowne jest zawsze wyrażeniem zdaniowym. Natomiast wskaźnikami kwantyfikatora są najczęściej zmienne nazwowe  $x, y, z$ .

#### **PRACA DOMOWA - ZAD.1**

Proszę wskazać wskaźniki i zasięgi operatorów:

1.  $\forall x F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow F(x)) \rightarrow G(y)$
2.  $\forall x F(x) \wedge \forall y F(y) \rightarrow (F(x) \rightarrow G(y))$

3.  $\forall x [F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow F(x)) \rightarrow G(y)]$
4.  $\forall x F(x) \wedge \forall y [(F(y) \rightarrow F(x)) \rightarrow G(y)]$
5.  $\{x: x \text{ jest człowiekiem}\}$

### 3. SYNTAKTYCZNA ANALIZA WYPOWIEDZI

Syntaktyczna analiza wypowiedzi ma na celu wskazanie, jakiego rodzaju wyrażeniami są elementy składowe danej wypowiedzi (innymi słowy: określenie, jakiego rodzaju wyrażenia składają się na daną wypowiedź). Do takiej analizy wykorzystuje się metodę wskaźników syntaktycznych. Każdej kategorii syntaktycznej języka przyporządkowywany jest określony wskaźnik: dla nazw jest to wskaźnik  $n$ , dla zdań –  $z$ , dla funktorów – odpowiednie symbole zapisane w postaci ułamkowej. W liczniku ułamka wpisujemy to, co funktor tworzy wraz ze swoimi argumentami, natomiast w mianowniku – argumenty tego funktora. Przykładowo: „mały” to funktor o wskaźniku  $n/n$ , „oraz” –  $z/zz$ .

Zanotujmy, że:

**DEF.** *Funktor główny wyrażenia  $W$*  jest to funktor, który wraz ze swoimi argumentami, daje całe wyrażenie  $W$ .

#### PRZYKŁ.

Analiza syntaktyczna wypowiedzi „Monika idzie do szkoły lub czyta książkę” byłaby następująca:

Monika	idzie do	szkoły	lub	(Monika)	czyta	książkę
n	z/nn	n		n	z/nn	n

gdzie „lub” jest funktorem głównym.

Wypowiedź ta składa się z 3 nazw („Monika”, „szkoła”, „książka”, przy czym jedna z nich występuje dwa razy), z 2 predykatów („idzie do”, „czyta”), 1 spójnika („lub”) oraz 3 zdań, z czego 2 są proste („Monika idzie do szkoły”, „Monika czyta książkę”), 1 złożone („Monika idzie do szkoły lub Monika czyta książkę”).

### 4. FORMALNA ANALIZA WYPOWIEDZI

Formalna analiza wypowiedzi ma na celu sformalizowanie wypowiedzi w określonym języku symbolicznym logiki (innymi słowy: „przetłumaczenie” wypowiedzi z języka naturalnego na formalny). Przekładu będziemy dokonywać na dwa języki – język rachunku zdań oraz język predykatowy.

#### 4.1 FORMALNA ANALIZA W RACHUNKU ZDAŃ

W rachunku zdań używamy dwóch typów symboli: *symboli zdaniowych* ( $p, q, r$ ), na które formalizujemy każde ze zdań prostych danej wypowiedzi oraz *symboli spójników* ( $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$ ).

Poszczególne spójniki są rozumiane zgodnie z następującymi charakterystykami zawartymi w tabelkach:

#### *funktor negacji*

<b>p</b>	<b><math>\neg p</math></b>
1	0
0	1

**koniunkcja** - Czytamy:  $p$  i  $q$ , np. *Jan idzie do szkoły i gwizdże*. Zdanie to jest prawdziwe tylko wtedy, gdy Jan rzeczywiście idzie do szkoły (czyli  $v(p)=1$ ) i rzeczywiście w tym czasie również gwizdże (czyli również  $v(q)=1$ ).

p	Q	$p \wedge q$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**alternatywa zwykła** - Czytamy:  $p$  lub  $q$ , np. *Jan studiuje historię lub filozofię*. Zdanie to jest prawdziwe, bądź gdy Jan studiuje tylko historię (tzn.  $v(p)=1$  i  $v(q)=0$ ), bądź gdy studiuje tylko filozofię (tzn.  $v(p)=0$  i  $v(q)=1$ ), bądź gdy studiuje dwa kierunki: historię i filozofię (tzn.  $v(p)=1$  i  $v(q)=1$ ).

p	Q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

**implikacja** - Czytamy: *jeżeli  $p$ , to  $q$* , np. *Jeżeli Kraków jest stolicą Polski, to  $2+2=4$* . Pierwszy człon implikacji to poprzednik, drugi następnik.

✓ **UWAGA**: tego spójnika nie wolno utożsamiać z wynikaniem między zdaniem, a zdarzenia przez niego opisywanego z przyczynowością obserwowaną w rzeczywistości pozajęzykowej.

p	Q	$p \rightarrow q$
1	1	1
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
0	1	1
0	0	1

**równoważność** - Czytamy:  *$p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$*  lub:  *$p$  wtedy, gdy  $q$*  lub:  *$p$  to tyle co  $q$* . Równoważność między zdaniem zachodzi, gdy zdania te mają te same wartości logiczne (tzn. gdy  $v(p) = v(q) = 1$  lub gdy  $v(p) = v(q) = 0$ ).

p	q	$p \equiv q$
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
1	0	0
0	1	0
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

## 4.2 FORMALNA ANALIZA W RACHUNKU PREDYKATÓW

W rachunku predykatów będziemy w tej chwili używać trzech typów symboli (choć język ten jest bogatszy): **symboli nazwowych** ( $x, y, z$ ), na które formalizujemy każdą nazwę, symboli predykatowych (dowolne wielkie litery alfabetu), na które formalizujemy każdy predykat oraz **symboli spójników** ( $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$ ). Przyjęło się, że w schemacie zdania prostego zaczyna się od predykatu, a następnie wymienia się jego argumenty. Dlatego zdanie „Ania kocha Marka” sformalizujemy:  $K(x, y)$ , gdzie  $K$  symbolizuje predykat „kochać”,  $x$  symbolizuje nazwę „Ania”, a  $y$  – „Marek”.

### PRZYKŁ.

Formalizacja wypowiedzi „Monika idzie do szkoły lub czyta książkę” byłaby następująca:

$\boxed{\text{Monika idzie do szkoły}} \text{ lub } \boxed{\text{(Monika) czyta książkę}}$

- w rachunku zdań:  $p \vee q$
- w rachunku predykatów:  $I(x, y) \vee C(x, z)$

### PRACA DOMOWA - ZAD. 2

Proszę dokonać analizy syntaktycznej i formalnej wypowiedzi:

1. Ładna Ala lubi czarnego kota.
2. Ania mieszka w wysokim budynku i ma piękny widok.
3. Jeżeli Anna Ala jest ładna, to Piotr rozmawia z Alą.
4. Adam wyzdrowieje, tylko wtedy gdy odwiedzi lekarza.
5. Jeżeli nieprawda, że Piotr dzwoni do kolegi, to dzwoni do miłej koleżanki.
6. Piotr wyznaje Ewie miłość, mimo że Ewa kocha Jana.
7. Jeżeli nie nauczę się logiki, to nie zdam egzaminu.
8. Jeżeli Jan śpi, to jeżeli Anna go nie obudzi, to zaśpi on do szkoły.
9. Jeżeli Anna jest zazdrosna o Piotra, a Piotr o nią, to Anna pokłóci się z Piotrem.

### PRACA DOMOWA - ZAD. 3

Proszę uzupełnić poniższe tabelki:

1.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

2.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

3.

p	q	$p \equiv q$	$p \vee q$	$(p \equiv q) \rightarrow (p \vee q)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

## 5. BUDOWA DEFINICJI

Każda definicja składa się z trzech części:

- *definiendum* – części, w której występuje wyrażenie definiowane;
- funktora definicyjnego – mogą to być wyrażenia takie jak np.: „*jest to*”, „*=*”, „*≡*”, „*oznacza*”;
- *definiensa* – części definiującej.

Schemat definicji można przedstawić następująco:

*Definiendum* – **funktor definicyjny** – *Definiens*

Ze względu na rodzaj wyrażeń stanowiących poszczególne części definicji możemy wyróżnić następująco zbudowane definicje:

1. *Definiendum* – funktor definicyjny – *Definiens*

$n \quad z/nn \quad n$

W definicjach, w których *definiendum* i *definiens* są nazwami, funktor definicyjny jest zawsze funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów nazwowych (z/nn). Funktor taki reprezentowany jest przez wyrażenia takie jak: „*jest to*”, „*=*”, „*oznacza*”, itp.

2. *Definiendum* – funktor definicyjny – *Definiens*

$z \quad z/zz \quad z$

W definicjach, w których *definiendum* i *definiens* są zdaniami, funktor definicyjny jest zawsze funktorem zdaniotwórczym od dwóch argumentów zdaniowych (z/zz). Funktor taki reprezentowany jest przez wyrażenia takie jak: „*≡*”, „*jest równoważne*”, „*wtedy i tylko wtedy, gdy*”, itp.

### PRZYKŁ.

a. Def1. *Drzewo jest to roślina drzewiasta z koroną o ulistnionych gałęziach*

W tej definicji *definiendum* stanowi nazwa „*drzewo*”, funktorem definicyjnym jest funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych: „*jest to*”, natomiast *definiens* stanowi nazwa złożona: „*roślina drzewiasta z koroną o ulistnionych gałęziach*”.

b. Def2. *Roślina jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy roślina jest drzewiasta i posiada koronę o ulistnionych gałęziach*

W tej definicji *definiendum* stanowi zdanie „*roślina jest drzewem*”, funktorem definicyjnym jest funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów zdaniowych: „*wtedy i tylko wtedy, gdy*”, natomiast *definiens* stanowi zdanie „*roślina jest drzewiasta i posiada koronę o ulistnionych gałęziach*”.

Zauważmy, że wyrażeniem definiowanym w tej definicji jest wyrażenie „*drzewo*”. Wyrażenie definiowane nie stanowi więc całego *definiendum* (tzn. wyrażenia: „*roślina jest drzewem*”), ale tylko jego fragment.

c. Def3.  $(A \subset B) \equiv (A \cap B = A)$

W tej definicji *definiendum* stanowi wyrażenie „ $A \subset B$ ”, funktorem definicyjnym jest „ $\equiv$ ”, natomiast *definiens* stanowi wyrażenie „ $A - B = A$ ”. Wyrażeniem definiowanym jest funktor zawierania się dwóch zbiorów, czyli „ $\subset$ ” i nie stanowi całego *definiendum* (tzn. wyrażenia: „ $A \subset B$ ”).

## II. TEORIA ZBIORÓW (dotyczy materiału z wykładów)

### 1. PODZIAŁ ZBIORÓW

1.1 Podział ze względu na charakter zbioru

1.2 Podział ze względu na ostrość warunku

1.3. Podział ze względu na złożoność

### 2. RELACJE MIĘDZY ZBIORAMI

#### 1. PODZIAŁ ZBIORÓW

##### 1.1 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA CHARAKTER ZBIORU:

Ze względu na charakter zbioru wyróżnia się:

➤ **Zbiory kolektywne**

➤ **Zbiory dystrybutywne**

**Zbiór kolektywny** – realnie istniejąca *całość* (*totum*), w której da się wyróżnić *realne części*. Zbiory kolektywne są przedmiotem badań mereologii Leśniewskiego.

**Zbiór dystrybutywny** - pewna mnogość obiektów, która realnie nie istnieje i jest wyróżniona myślowo ze względu na pewną *cechę*.

Zbiory dystrybutywne dzielą się na zbiory klasyczne i rozmyte.

Zbiory badane na gruncie teorii mnogości i w większości rozważań logiczno-matematycznych są właśnie zbiorami dystrybutywnymi klasycznymi.

##### PRZYKŁ.

$Z(x)$  - zbiór zielonych przedmiotów,  $x$  - przedmiot,  $Z$  - cecha bycia zielonym.

$Z(x) = \{x: x \text{ jest zielony}\}$

##### Porównanie zbiorów kolektywnych i dystrybutywnych:

###### PRZYKŁ.1

Zbiór pszczół - wyróżniony ze względu na cechę *bycia pszczolą* – jest to zbiór dystrybutywny.

Rój pszczół - pewna zorganizowana *całość*, która może pogryźć - a więc *realnie* istniejąca, (*elementy* tego zbioru również istnieją *realnie*) - zbiór kolektywny.

###### PRZYKŁ.2

Każde z jabłek w tym worku waży 100 gr (tzn. każde jabłko z osobna) – zbiór jabłek wyróżniony jest ze względu na wspólną cechę określonej wagi – zbiór jabłek rozumiany jest jako dystrybutywny

Wszystkie jabłka w tym worku waży 70 kg (tzn. całość jabłek) - zbiór jabłek rozumiany jest jako zbiór kolektywny

## RÓŻNICE:

❖ **Zbiór kolektywny** – zbiór ten jest realnie istniejącym obiektem, np. las, tabliczka czekolady

**Zbiór dystrybutywny** – nie istnieje realnie, sztucznie stworzony (za pomocą myślowej operacji) poprzez:

1. wskazanie (wyliczenie) elementów

2. nałożenie warunku - czyli określenie cechy klasyfikującej obiekty do tego zbioru:

$X = \{x: x \text{ posiada pewną cechę}\}$ .

❖ **Zbiór kolektywny** – istnienie realne całości zależy od istnienia realnego jego części.

**Zbiór dystrybutywny** – nie dotyczy.

❖ **Zbiór kolektywny** – występuje tu relacja bycia częścią zbioru:  $x < X$  (*x jest częścią X-a*)

**Zbiór dystrybutywny** – występuje tu relacja bycia elementem zbioru:  $x \in X$  (*x należy do X, x jest elementem X*)

Te relacje mają różne własności: relacja bycia częścią jest relacją przechodnią, natomiast relacja bycia elementem – relacją nieprzechodnią

Przykł. Niech  $x$  to zielony liść,  $X$  – drzewo,  $Y$  – las. Wtedy zachodzi:  $x < X \wedge X < Y \rightarrow x < Y$ , spełniony jest zatem warunek przechodniości.

Przyjmijmy natomiast, że  $x$  to zielony liść, ale  $X$  to zbiór przedmiotów zielonych i  $Y$  - zbiór zbiorów przedmiotów kolorowych. Wtedy:  $\neg(x \in X \wedge X \in Y \rightarrow x \in Y)$ . Zatem nie jest spełniony warunek przechodniości dla relacji należenia do zbioru.

## **1.2 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA OSTROŚĆ WARUNKU:**

Ze względu na ostrość warunku wyróżnia się:

- **Zbiory klasyczne**
- **Zbiory rozmyte**

**Zbiór klasyczny** – zbiór, dla którego cecha wyróżniająca mnogość obiektów jest *cechą ostrą*, tzn. że w stosunku do dowolnego przedmiotu można bez wahania orzec, czy przedmiot ten posiada, czy nie posiada danej cechy:  $\forall x (x \in X \text{ lub } x \notin X)$ .

Zbiory klasyczne dzielą się na proste i złożone.

W przypadku zbiorów klasycznych możemy mówić o *idealizacji*, czyli o wyostrzaniu cech.

**Zbiór rozmyty** – zbiór, dla którego cecha wyróżniająca mnogość obiektów nie jest *cechą ostrą*.

## PRZYKŁ.

**a.** cecha: *bycie łysym* – wyznacza ona zbiór osób łysych.

Cecha ta jest *nieostra*, gdyż w sytuacji gdy osoba posiada np. 70 włosów to nie można bez wahania orzec, czy ta osoba posiada cechę bycia łysym, czy tej cechy nie posiada.

**b.** cecha: *bycie człowiekiem* – wyznacza ona zbiór ludzi:  $X = \{x: x \text{ jest człowiekiem}\}$

Jest to cecha nieostra (*idealizacja*: psycholog, który bada postrzeganie przestrzeni przez człowieka - dla niego nieważne będą „graniczne” przypadki, on ma swoją własną koncepcję człowieka, będzie dokonywał idealizacji cechy bycia człowiekiem).

**c.** cecha: *bycie liczbą naturalną* - wyznacza zbiór liczb naturalnych. Jest to cecha ostra.

**d.** cecha: *bycie nazwą w sensie logicznym* - wyznacza zbiór nazw w sensie logicznym:

$X = \{x: x \text{ jest nazwą w sensie logicznym}\}$

Jest to cecha ostra.

### 1.3. PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA ZŁOŻONOŚĆ

Ze względu na złożoność wyróżnia się:

- **Zbiory proste**
  - **zbiór pełny (uniwersum)**
  - **zbiór pusty**
- **Zbiory złożone**
  - **dopełnienie**
  - **suma**
  - **iloczyn (część wspólna)**
  - **różnica**

#### **Zbiór pełny**

Oznaczenie: 1, U lub V.

**DEF.**  $1 = \{x: x=x\}$

Jest to zbiór wszystkich przedmiotów niesprzecznych. Dla takich przedmiotów zachodzi zawsze:  $x=x$ .

Można ograniczać 1-kę do konkretnego pola rozważań, np. 1-ka ontologiczna (zbiór bytów), 1-ka astronomiczna (zbiór obiektów kosmicznych), uniwersum wyrażań (takie ograniczenie występuje np. w logice), uniwersum liczb (np. w matematyce).

#### **Zbiór pusty**

**DEF.**  $\emptyset = \{x: x \neq x\}$

#### **Dopełnienie zbioru**

Niech X będzie zbiorem ludzi. Wtedy  $\neg X$  jest zbiorem nie-ludzi (pozostałych, różnych od ludzi, obiektów w danym uniwersum - dopełnienie zbioru to „dopełnienie do uniwersum”).

Zachodzi więc następujący związek:  $\neg X = 1/X$

**DEF.**  $x \in \neg X \equiv x \notin X$

#### **Suma zbiorów**

**DEF.**  $x \in X \cup Y \equiv x \in X \vee x \in Y$

#### **Iloczyn zbiorów**

**DEF.**  $x \in X \cap Y \equiv x \in X \wedge x \in Y$

#### **Różnica zbiorów**

**DEF.**  $x \in X/Y \equiv x \in X \wedge x \notin Y$

Symbol różnicy zapisuje się również inaczej:  $X-Y$ .

Podane definicje zbiorów można formułować w inny sposób. Przykładowo definicję różnicy zbiorów można zapisać następująco:

$X/Y = \{x: x \in X \wedge x \notin Y\}$ .